The Fourier transform on $\ell^1(\mathbb{Z})_+$ and Spectrum preservers

佐藤海音

新潟大学大学院 自然科学研究科
数理物質科学専攻 修士 2 年

修士論文発表会
2026 年 2 月 6 日

研究の背景となる文献

定理 (O. Hatori, T. Miura and H. Takagi, 2007)

A を単位的 Banach 環, B を半単純な単位的可換 Banach 環, $T : A \to B$ を全射写像とする．各 $a, b \in A$ で

$$\sigma(T(a) + T(b)) \subset \sigma(a + b)$$

を満たすならば, T は linear かつ multiplicative.

定理 (S. Kowalski and Z. Słodkowski, 1980)

A を複素 Banach 環とする．写像 $f : A \to \mathbb{C}$ が各 $x, y \in A$ で

$$f(0) = 0,\ f(x) - f(y) \in \sigma(x - y)$$

を満たすならば, f は linear かつ multiplicative.

今回考えるのは $\ell^1(\mathbb{Z})$ の正錐 $\ell^1(\mathbb{Z})_+$．正錐はもとの環構造を保たないので, 直前の S. Kowalski and Z. Słodkowski の画期的な定理が使えない状況.

準備

Definition 1

$\ell^1(\mathbb{Z})_+ := \{f \in \ell^1(\mathbb{Z}) \mid f(n) \geq 0, (\forall n \in \mathbb{Z})\}.$

Definition 2 (特性関数)

各 $n \in \mathbb{Z}$ について, n の特性関数 $\chi_n \in \ell^1(\mathbb{Z})_+$ を次で定める.

$$\chi_n(m) := \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

Definition 3 (フーリエ変換)

各 $f \in \ell^1(\mathbb{Z})_+$ について, そのフーリエ変換 $\widehat{f}$ を次で定義する.

$$\widehat{f}(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) z^n \ (z \in \mathbb{T}).$$

主結果

主結果 1

$T:\ell^1(\mathbb{Z})_+\to\ell^1(\mathbb{Z})_+$ を全射写像とする．各 $f,g\in\ell^1(\mathbb{Z})_+$ で

$$\mathrm{Ran}(\widehat{T(f)}+\widehat{T(g)})=\mathrm{Ran}(\widehat{f}+\widehat{g})$$

を満たすならば，各 $f\in\ell^1(\mathbb{Z})_+$ で，T は $T(f)=f\circ\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ 若しくは $T(f)=f\circ(-\mathrm{id}_{\mathbb{Z}})$ と書ける．

- 2025 年 11 月 RIMS にて発表「作用素論の最近の進展とその応用」．
- 指導教員との共著で Archiv der Mathematik に掲載が決定している [3].

主結果 2

$T:\ell^1(\mathbb{Z})_+\to\ell^1(\mathbb{Z})_+$ を全射写像とする．各 $f,g\in\ell^1(\mathbb{Z})_+$ で

$$\mathrm{Ran}(\widehat{T(f)}\widehat{T(g)})=\mathrm{Ran}(\widehat{f}\widehat{g})$$

を満たすならば，T を特性関数全体で制限した写像 $S:=T|_{\{K\chi_n|n\in\mathbb{Z},K>0\}}$ は，各 $n\in\mathbb{Z},K>0$ で $S(K\chi_n)=K\chi_n$ 若しくは $S(K\chi_n)=K\chi_{-n}$ と書ける．

主結果 1 の証明概説 1

まず $\ell^1(\mathbb{Z})_+$ を特性関数全体に制限した写像 T の特徴づけを行った．これは, 次の補題 (計算で示せる) による．

$M_{n,m}$ の定義

$$M_{n,m} := \{z^n + z^m | z \in \mathbb{T}\} \cap 2\,\mathbb{T}\,.$$

Lemma 4

n, m を, それぞれ $n \neq m$ なる整数とする．このとき, 次の 2 つが成り立つ．

$$\begin{aligned} M_{n,m} &= \left\{ 2\left(e^{i\frac{2k\pi}{m-n}}\right)^m \mid k = 0, 1, \ldots, |m-n| - 1 \right\} \\ &= \left\{ 2\left(e^{i\frac{2k\pi}{m-n}}\right)^n \mid k = 0, 1, \ldots, |m-n| - 1 \right\}, \\ |M_{n,m}| &= \frac{|n-m|}{\gcd(n,m)}. \end{aligned}$$

$\{z^1 + z^m | z \in \mathbb{T}\}$ ただし $m \in \mathbb{Z} \wedge m \neq 1$ を考察することで示された．

主結果1の証明概説2 (全体への拡張補題)

Lemma 5

$$\begin{cases} \mathrm{Ran}(\hat{f}+nz) & = \mathrm{Ran}(\hat{g}+nz) \\ \mathrm{Ran}(\hat{f}+nz^{-1}) & = \mathrm{Ran}(\hat{g}+nz^{-1}) \end{cases}$$

を各 $n \in \mathbb{Z}, f, g \in \ell^1(\mathbb{Z})_+$ で満たすならば, $f = g$.

(証明の概略)
仮定の最初の式から $n \in \mathbb{Z}, \theta \in [0, 2\pi)$ ごとに $\theta_n \in [0, 2\pi)$ が定まり,

$$\frac{1}{n}\left(\widehat{f}(e^{i\theta}) - \widehat{g}(e^{i\theta_n})\right) = e^{i\theta} - e^{i\theta_n}$$

が成り立つから, $n \to \infty$ の極限を取って式変形して評価すると (2つ目の式で同様のことをした結果も合わせて) 結果を導ける. //

主結果2(積の方) の証明概説

なんとか和の成果を流用できないかというアイデアで打ち立てて証明したもの.

Lemma 6

写像 $T:\ell^1(\mathbb{Z})_+\to\ell^1(\mathbb{Z})_+$ が全射で,

$$\mathrm{Ran}(\widehat{T(f)}\widehat{T(g)})=\mathrm{Ran}(\hat{f}\hat{g})$$

を各 $f,g\in\ell^1(\mathbb{Z})_+$ で満たすとする. このとき, T はある全単射 $\varphi:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ により

$$T(\chi_0+\chi_n)=\chi_0+\chi_{\varphi(n)},$$

と書ける.

(証明の概略)

$$\begin{cases}\mathrm{Ran}(\widehat{T(\chi_0+\chi_{-n})}) & =1+\mathbb{T},\\ \mathrm{Ran}(\widehat{T(\chi_0+\chi_{-n})}\widehat{\chi_{\varphi(n)}}) & =1+\mathbb{T}.\end{cases}$$

が (計算すると) 成り立つので, 無理数の argument を取る $z\in\mathbb{T}$ を考察して矛盾を導く. //

今後の方針

積の問題の完全な解決

- 積の問題は特性関数に限って解いていた．そもそも積についても特性関数を調べることが本質的に意味のあることかまだ分かっていないので，調べる．

対象空間の一般化

- 本研究の結果は $\ell^1(\mathbb{Z})_+$ という特定の空間に限定されているが，これを局所コンパクト群などのより一般的な設定へ拡張できるか検討することは自然な問いである．

証明手法の精緻化

- 一般化を試みるにあたり、主結果 1 および 2，また依拠する補助的な補題の証明を再検討する必要がある．
- 現在の議論は本質的に $\ell^1(\mathbb{Z})_+$ の構造に依存しているため (Lemma 4 の $M_{n,m}$ の構造の考察など)，より汎用的な手法へと洗練させることが課題である．

- O. Hatori, T. Miura and H. Takagi, *Unital and multiplicatively spectrum-preserving surjections between semi-simple commutative Banach algebras are linear and multiplicative,* Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007.
- S. Kowalski and Z. Słodkowski, *A characterization of multiplicative linear functionals in Banach spaces,* Studia Math, 1980.
- S. Oi and K. Sato, *Spectrally additive maps on the positive cones of the Wiener algebra,* Archiv der Mathematik, to appear.